



題目 ロケット推進力の測定

用意する物： 計算機， 定規

なお，この実験の補足情報を下記 web ページに掲載しておくので，
実験手引き書の訂正などないか，確認しておくこと。

http://ssdl.aero.kyushu-u.ac.jp/?AA_Experiment

1 目的

ロケットの推進力を実験的に求め，理論値と比較を行う。

また，測定に関する誤差と有効数字の考え方について学ぶ。

2 ロケットエンジンの性能

2.1 当エントロピー流れのノズルの方程式

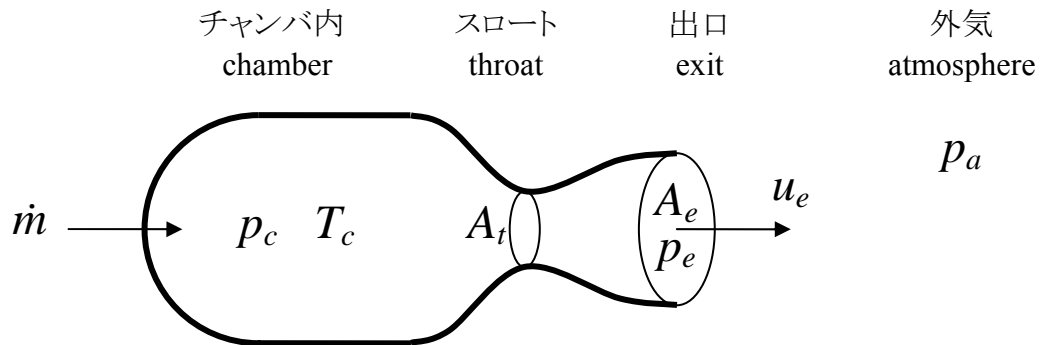


図 1 状態量の定義

質量流量を \dot{m} ，ノズル出口速度を u_e ，ノズル出口圧力を p_e ，外気圧を p_a ，ノズル出口断面積を A_e とすれば，ロケットエンジンの推力 (thrust) F_t は，

$$F_t = \dot{m} u_e + (p_e - p_a) A_e \quad (1)$$

スラスト・チャンバにおける圧縮空気¹の圧力を p_c ，温度を T_c ，ノズルスロート断面積を A_t とし，等エントロピー流れを仮定²すれば，質量流量 \dot{m} は，

$$\dot{m} = \frac{p_c A_t}{\sqrt{RT_c}} \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (2)$$

ここで， R は気体定数， γ は比熱比で，乾燥空気の場合，常温でそれぞれ $287.1 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ， 1.402 である。ノズル出口速度 u_e はノズル出口圧力とチャンバ圧力の比 p_e/p_c の関数として，

¹ 実際のエンジンでは p_c は燃焼圧に， T_c は燃焼温度に相応する。

² 実はこの実験の結果は，実験値と理論値がおおきく異なる。原因の一つとしてこの仮定が妥当ではないと考えられる。

$$u_e = \sqrt{\frac{2\gamma RT_c}{\gamma-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \tag{3}$$

で与えられる。ノズル出口圧力とチャンバ圧力の比 p_e/p_c は、ノズル開口比(ノズル出口断面積 A_e とノズルスロート断面積 A_t の比, area ratio) が判れば,

$$\frac{A_e}{A_t} = \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left/ \left\{ \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right\} \right.} \tag{4}$$

の解として得られる。図 2は式(4)をプロットした結果である。

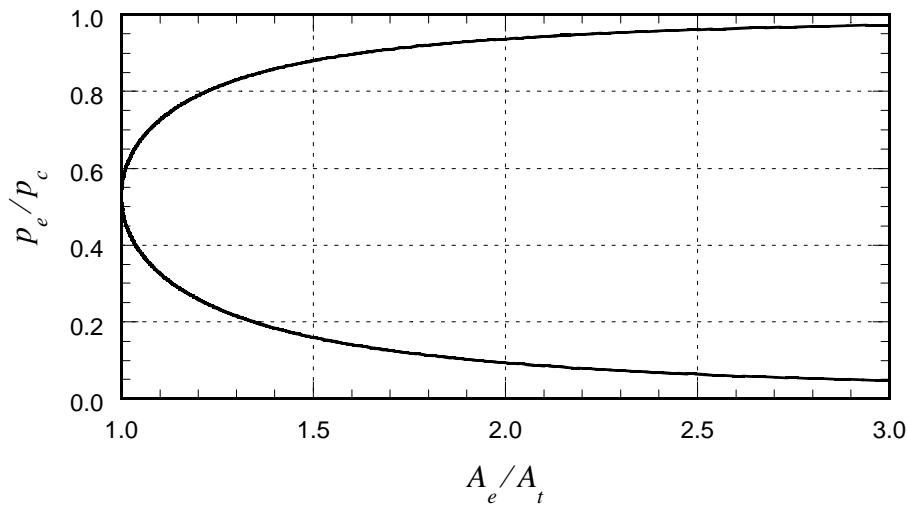


図 2 等エントロピー流れにおける出口圧力と出口断面積の関係($\gamma = 1.402$)

ロケットエンジンの推力は式(1)に示されることから、式(2)と式(3)を式(1)に代入して、

$$F_t = p_c A_t \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left\{ 1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} + (p_e - p_a) A_e \tag{5}$$

の関係を得ることができる。すなわち、推力は燃焼室圧力とノズル出口圧力、ノズルスロートおよび出口の断面積に依存するが、式(5)で見ると限りにおいては、燃焼温度や気体分子量には依存しない。

与えられた燃焼室の状態を一定にした場合の最適な p_e の条件を求めてみる。推力のノズル出口断面積の変化に対する変化量を求めるために、式(1)を A_e で微分すると、

$$\frac{dF_t}{dA_e} = u_e \frac{d\dot{m}}{dA_e} + \dot{m} \frac{du_e}{dA_e} + A_e \frac{dp_e}{dA_e} + p_e - p_a \tag{6}$$

となる。定常燃焼状態にあるロケットエンジンでは $dm = 0$ であり、ノズル出口における運動量方程式が $\dot{m} du_e = -A_e dp_e$ で与えられることから、

$$\frac{dF_t}{dA_e} = p_e - p_a \quad (7)$$

となる。したがって、 $p_e = p_a$ の条件において F_t が最大値をとることができる。すなわち、ノズル出口圧力が外気圧と等しくなった場合に、燃焼室内の温度と圧力のエネルギーが熱力学的に最も有効に推力に変換されることを示している。

以下に、ロケットエンジンの推力効率を表すのに有用である、いくつかの特性値について検討してみる。

2.2 比推力 (specific impulse)

比推力はロケットエンジン工学では最重要とされるエンジン性能評価のためのパラメータである。比推力 I_{sp} は、

$$I_{sp} = \frac{F_t}{\dot{m}g} \quad (8)$$

で定義される。ここで \dot{m} は推進薬の燃焼室内での単位時間あたりの燃焼量で、 g は重力加速度である。したがって、比推力は時間の次元をもち、質量 1 kg の推進薬が 1 kgf の推力を発生して維持できる時間を表しているものと考えることができる。式(5)と式(2)より I_{sp} についての関係式を求めてみると、

$$I_{sp} = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2\gamma RT_c}{\gamma-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} + \frac{1}{g} \sqrt{\frac{RT_c}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{p_e - p_a}{p_c - p_e} \right) \frac{A_e}{A_c}} \quad (9)$$

となる。式(9)からも分かるように、比推力はおおむね燃焼温度の平方根に比例し、気体分子量の平方根に反比例する³。すなわち、

$$I_{sp} \propto \sqrt{\frac{T_c}{M}} \quad (10)$$

したがって、高性能推進薬としては、できるだけ燃焼温度が高く、またできるだけ分子量の小さい燃焼気体を発生することのできる推進薬であることが分かる。

特に、比推力は式(8)からも分かるように、実験的には推力と推進薬の燃焼率だけを測定することによって決定することができるため、推進薬の燃焼性能あるいはロケットエンジンの燃焼効率を評価するのに最適なパラメータである。

2.3 推力係数 (thrust coefficient)

推力を無次元化して表示した特性は推力係数 C_F と呼ばれ、

$$C_F = \frac{F_t}{p_c A_c} \quad (11)$$

³ $R = \mathfrak{R}/M$: \mathfrak{R} は普遍定数, M は分子量.

のように定義される. 式(5)を式(11)に代入して,

$$C_F = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left\{ 1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} + \left(\frac{p_e}{p_c} - \frac{p_a}{p_c}\right) \frac{A_e}{A_t} \quad (12)$$

のように求まる. 式(4)からも分かるように, p_e/p_c は A_e/A_t の関数であり, したがって, C_F は γ , p_a/p_c , A_e/A_t の独立した3個のパラメータによって決定されることになる. C_F は $p_e = p_a$ で極大となり, $p_e > p_a$ となっても C_F は低下する. $p_e = p_a$ のような A_e/A_t は特に適正膨張 (optimum expansion) と呼ばれ, $p_e < p_a$ では過膨張 (over-expansion), $p_e > p_a$ では不足膨張 (under-expansion) と呼ばれる. 適正膨張は式(12)の右辺第2項が0になった状態を示す.

実際のロケットエンジンの設計には式(12)によって理論的に求められた C_F と, 実験において測定した F_t , p_c , A_t から式(11)を用いて求められた C_F を比較することによって, ノズルの流れに関する性能の評価が可能である.

2.4 特性排気速度 (characteristic velocity)

特性排気速度 C^* は,

$$C^* = \frac{p_c A_t}{\dot{m}} \quad (13)$$

のように定義することができる. 式(2)を式(13)に代入することによって,

$$C^* = \sqrt{\frac{RT_c}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (14)$$

のように求まる. 式(14)より C^* は燃焼温度, 気体分子量, 比熱比の独立した3個のパラメータによって決定されることから, 燃焼室の状態を判断するのに有効な特性値であることが分かる.

式(13)からも分かるように, 実験的には燃焼圧力, 推進薬の燃焼率, それにノズルスロート断面積を測定することにより C^* が容易に決定される. また, 式(14)によって理論的に C^* を求めることができる. したがって, これらの両者の方法で求めた C^* を比較することによって, 燃焼室内の燃焼状態を評価することができる.

2.5 比推力, 推力係数, 特性排気速度の関係

I_{sp} の定義である式(8)と式(11), (13)を組み合わせることにより,

$$I_{sp} = \frac{C_F C^*}{g} \quad (15)$$

の関係式が得られる. ここで C_F はノズルに関するパラメータによって決定され, C^* は燃焼室のパラメータによって決定されることから, 比推力がこれらの両者を含めた総合的な性能を評価できる特性値であることが分かる.

3 実験装置と手順

3.1 実験装置

図 3に実験装置の概略図を示す.

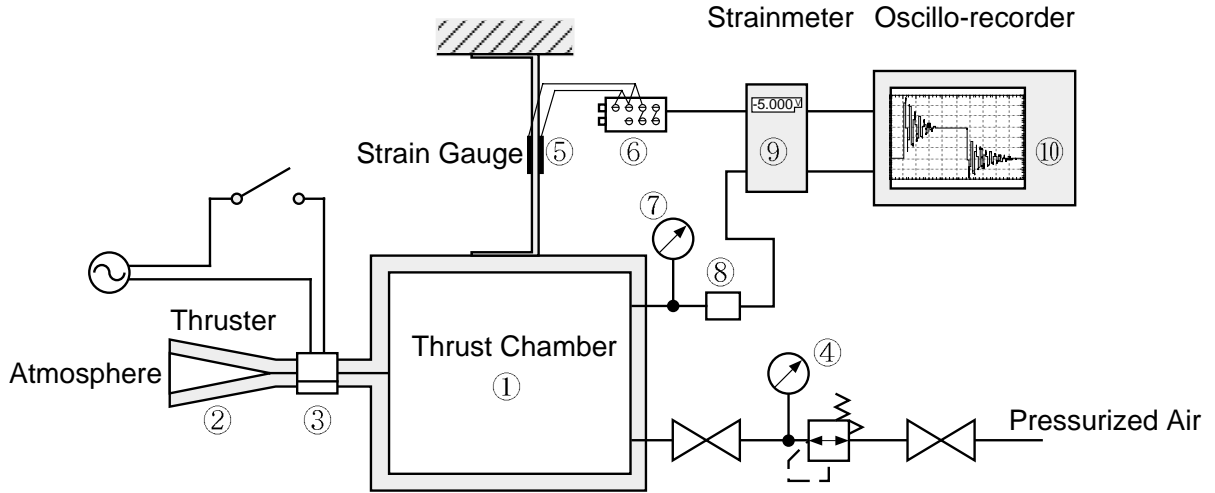
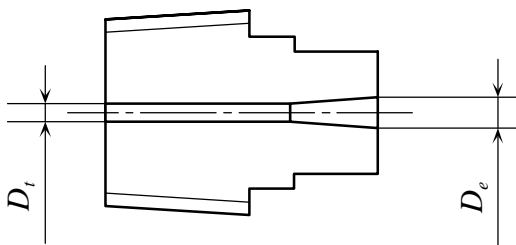


図 3 実験装置の概略図

- | | |
|--------------------|---|
| ① スラスト・チャンバ | 硬質アルミ製(容積: $\varnothing 100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$) |
| ② スラスタ | ステンレス製(図 4参照) |
| ③ 電磁弁 ⁴ | CKD製 GAG-432-4-0-5A-AC100V |
| ④ ゲージ付きレギュレータ | PISCO 製 RVUM 8-8 |
| ⑤ ひずみゲージ | 共和電業製 KFG-5-120-C1-23L1M2R |
| ⑥ ブリッジ・ボックス | 共和電業製 DP-120P |
| ⑦ 圧力計 ⁵ | 長野計器製作所製 AA10-121 |
| ⑧ 圧力変換器 | NEC 三栄製 9E02-P6-10 |
| ⑨ 動ひずみ測定器 | 共和電業製 DPM-712B |
| ⑩ デジタル・オシロレコーダ | NEC 三栄製 オムニエース RT3300 |
| ⑪ 精密電子秤 | ザルトリウス BA110 |
| ⑫ 校正用の錘 | 鉛製(釣り用) 約 85 g のものを5個 |



スロート直径: $D_i = 2.5\text{ mm}$
 出口直径: $D_e = 3.3\text{ mm}$

図 4 スラスタ・ノズル

⁴ 電磁弁のOPEN / CLOSEは電源のOFF / ONで操作できる.

⁵ 圧力計の示す値はゲージ圧(外気圧との差圧)である.

3.2 実験装置の準備

3.2.1 測定機器の接続

- 図 5を参考にひずみゲージ・ブリッジを組み、ブリッジ・ボックスを動ひずみ測定器の CHANNEL 1 のINPUT端子(裏面)に接続する。
- 圧力変換器を動ひずみ測定器の CHANNEL 2 の INPUT 端子に接続する。
- 動ひずみ測定器の CHANNEL 1 と 2 の OUTPUT A(裏面)と、デジタル・オシロレコーダの CHANNEL 1 と 2(側面)を、それぞれ BNC ケーブルで接続する。
- 動ひずみ測定器、デジタル・オシロレコーダの順に電源を入れる。

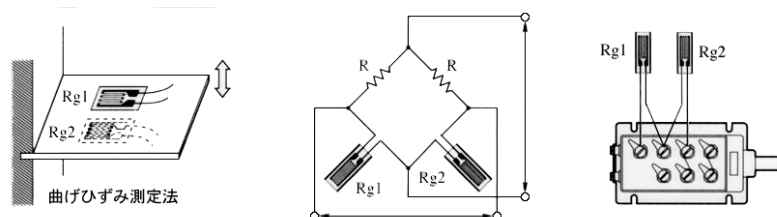


図 5 ゲージ・ブリッジの組み方

3.2.2 空気配管の接続

- 図 3 実験装置の概略図を参考に空気配管系を確認する。
- 電磁弁を AC 100 V 電源に接続し、電磁弁を閉じる(電源 ON)。
- コンプレッサの止め弁およびドレン弁が閉じていることを確認し、コンプレッサの電源を ONにする⁶。
- 約 3 分弱経過してコンプレッサが停止したら、空気タンクの圧力計でタンク内圧を確認する(8 kgf/cm² 以上)。

⁶ 圧縮運転中は素手で圧縮部(シリンダヘッド・吐き出し管)に触れないこと。

3.2.3 動ひずみ測定器の較正⁷

- メーターモードを DC にする。
- RANGE を 1000 $\mu\epsilon$ に設定する(⑦レンジ選択キー)。
- 較正值を 1000 $\mu\epsilon$ に設定する(⑫較正值・コンパレータ設定器)。
- ⑤平衡調整実行キーを 0.5 秒内に 2 回押す。
- ②メータ・パネルの表示が完全に 0.000 V にならない場合は、⑤平衡調整実行キーの上にある⑥平衡微調整器をドライバーで回して 0.000 V に調整する。
- ⑬較正実行キーを上押しした状態で、②パネル・メータの表示が 1.000 V になるように⑧バーニア調整キーを使用して調整する。

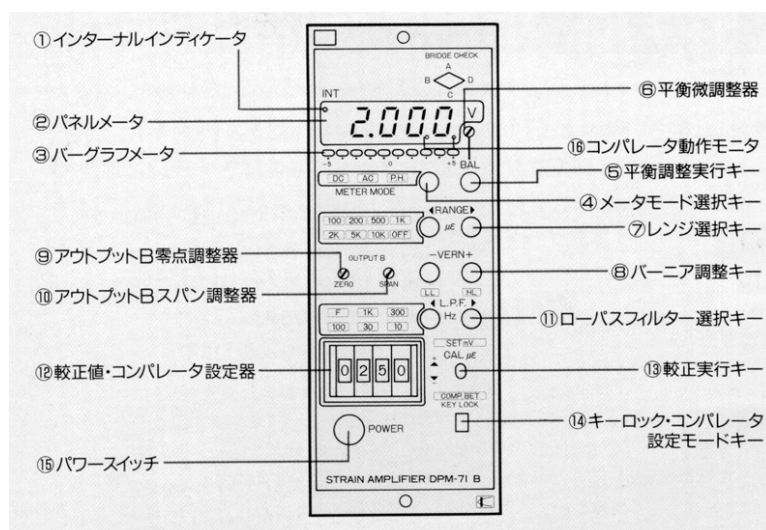


図 6 動ひずみ測定器の操作面

⁷ 動ひずみ測定器は熱的安定状態になるまで、30 分から 60 分程度の予熱時間を必要とする。

4 実験

4.1 推進力の測定

- スラスト・チャンバ内圧を設定する。
 - ここでは最大推力で測定するので、レギュレータを全開にする。(右へいっぱいに戻す)。
- デジタル・オシロレコーダを設定する。
 - 「アンプ」を選択する。CH1を基線⁸ 20.00, 感度 2 V, フィルタ 500 Hz, 入力ONに設定する。
 - CH2を基線 0.00, 感度 2 V, フィルタ 500 Hz, 入力 ON に設定する。
 - 「記録・メモリ」を選択する。記録速度を 10 mm/s に設定する。
- 大気状態を記録する。
 - 実験室に設置してあるアネロイド気圧計で大気圧 p_a を測定する⁹。
 - 気圧計に付属している温度計で大気温度 T_a を測定する¹⁰。
- ロケット推進力を測定する。
 - 記録を開始する(レコーダーの「START / STOP」を押す)。
 - 電磁弁を開く(電源 OFF)。
 - チャンバ部の振動が減衰したらスラスト・チャンバ内圧 p_G を記録する。
 - 電磁弁を閉じる(電源 ON)。
 - 噴射停止後のチャンバ内圧も測定する¹¹。
 - 記録を終了する(レコーダーの「START / STOP」を押す)。
- デジタル・オシロレコーダの波形(図 7参照)から推進力を求める。
 - 電圧値 V_F を読みとる(図 7参照)。
 - 推力は $F_t = a \times V_F$, 推力係数は $C_F = F_t / (p_c A_t)$ で計算できる。ただし, $p_c = p_G + p_a$ で, A_t はノズルのスロート断面積である。
 - ここで, 電圧値 V_F と推力 F_t の比例定数 a が必要になるので, 次の較正実験を行う。

⁸ この装置で「基線」とは, 縦軸の何%の位置に 0Vのレベルを置いて, グラフ出力するかの設定である。

⁹ 標準大気圧 = 760 mmHg = 101,325 Pa. 1 kgf/cm² = 98,066.5 Pa.

¹⁰ コンプレッサに蓄えられている圧縮空気の温度は, 圧縮行程で大気温度より高くなるが, 圧縮から充分経過した後は大気温度と平衡していると考えられる。

¹¹ 今回の課題ではチャンバ内温度 T_c を計算に使用しないので測定していないが, 大気温度 T_a と噴射停止前後のチャンバ内圧とから, 断熱膨張を仮定して計算すると T_c を推定できる。

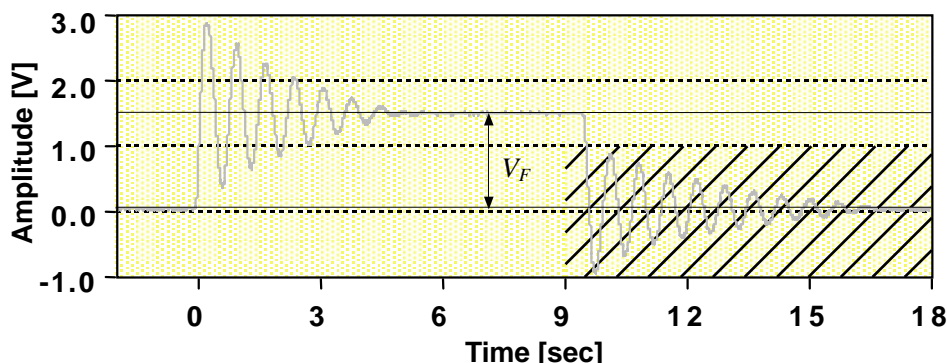


図 7 推進力の測定

4.2 測定系の較正¹²

電圧値 V_F と推力 F_t の比例定数 a を決定するため、較正実験を行う。較正の方法は、推力を模擬した既知の力をチャンバに加え、そのときの電圧値を調べる。これには、糸と滑車を介した錘を用いて、チャンバを前方に引く。

- 錘の質量を測定する
 - 錘は約 85g のものを5個用いる。錘の質量は不揃いなので、精密電子秤で個別に計量しておく。
- スラスト・チャンバを加圧する。
 - レギュレータを調整し、スラスト・チャンバ内圧を各自の推力を測定した時の値 p_G に設定する。
 - 加圧するとチャンバ周りの空気配管の剛性が上がり、測定系全体としてのバネ定数が変化する。つまりこれは、推進力の測定時とできるだけ近い条件で較正するための措置である。
- 錘の重量と電圧値の関係を測定する。
 - 動ひずみ測定器の較正を行う。
 - スラスト・チャンバに取り付けた糸を滑車にかけて、先に受け皿をつるす。
 - 錘の個数を0個から5個まで変化させ、そのときの動ひずみ測定器の表示電圧値を記録する。
 - 各測定の後には、錘を受け皿ごと降ろし、チャンバに張力が加わらないように置く。板バネの変形ヒステリシスのため、完全に 0V には戻らないであろう。この残留ひずみの電圧値を、さきの加重時の電圧値から差し引いて補正する。
 - 個数を変えるごとに、動ひずみ測定器の較正をやり直すと、より精度の高い測定が行える。

¹² 較正は本実験の前に行うのが普通であるが、この実験では推力測定時のチャンバ内圧をと条件を合わせて較正する必要から、事後に較正を行っている。

- 測定結果から較正值(1 V 当たりの荷重)を求める。
 - 電圧値を横軸に、錘の重量を縦軸にして電圧値と荷重の関係をプロットする。(図8参照)¹³
 - 加重と電圧値が比例関係になっていることを確認し、1 V 当たりの荷重(傾き)を較正值 a (gf/V)として図から求める¹⁴。

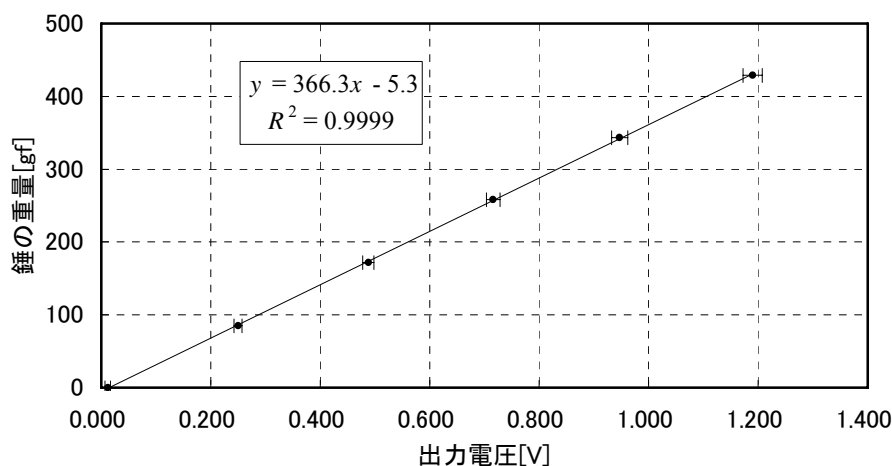


図 8 測定系の較正例(較正值 a)

4.3 結果の整理と考察

- 次頁からの資料を参考に、測定誤差を考慮して結果を整理せよ。
- 最低限含むべきデータ。
 - 実験で測定した値すべて。(自分のぶんだけでよい)
 - デジタル・オシロレコーダの出力波形グラフ。
 - 傾きから較正值を求めるグラフ。
(実験中に手書きしたものでも、後日コンピュータで描画したものでも可)
- 測定系の較正について考察せよ。
- 実験条件から、推力と推力係数の理論値を求めよ。
- 本実験より求められた推力係数について考察せよ。
- 推力係数を求めるにあたって、本実験で最大の誤差要因となっているのは何か。どのように改善すべきか考察せよ。

4.4 参考文献

- ジョージ・P・サットン, 「ロケット推進工学」, 山海堂
- 田辺英二, 「ロケット システム」
- 富田信之, 「宇宙システム入門」, 東京大学出版会

¹³ グラフは原点を通らないであろう。これは、チャンバには糸や受け皿の重量も加わっているためである。しかし、ここでは比例関係であることを確認し、傾きが決定できればよく、切片があっても問題ない。

¹⁴ 最小二乗法を用いて、より精度の高い較正值を算出することができる。(補足2の頁を参照)

補足1 測定誤差の考え方

A1.1 測定誤差の発生要因と分類

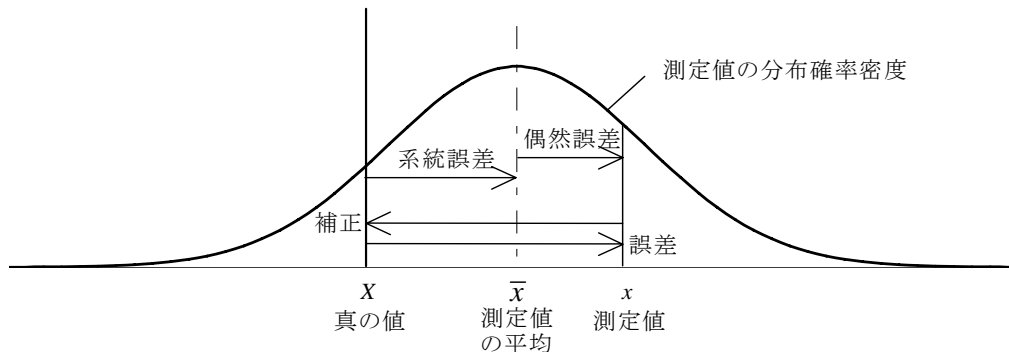


図 10 測定値の分布

ある物理量を測定したとき、真の値が X であるのに対し、測定値が x であったとする。このとき、 $x - X$ を真値に対する測定値の誤差、逆に $X - x$ を測定値から真値への補正と呼ぶ。

測定を繰り返し行った場合、 x の平均値が \bar{x} に収束するならば、 $\bar{x} - X$ を系統誤差と呼び、 $x - \bar{x}$ を偶然誤差と呼ぶ。系統誤差は、一連の実験中は一定値で、測定器の調整不完全などが原因である。偶然誤差は確率的な現象であり、外乱ノイズなどが原因である。

さらに、測定器の指示値を数値化し記録する際に生じる誤差がある。アナログ計器を目測する際の読み取り誤差。デジタル計器の場合は表示や記録の桁数が有限であるための丸め誤差。丸め誤差と本質的に同じであるが、A/Dコンバータの出力をコンピュータに取り込んで記録する場合は量子化誤差とも言う。

興味のある者は下記のキーワードについても調べてみよ。

「器差, 公差, 精度, 確度, 二乗平均(RMS)誤差, 個人誤差, 過誤, 残差」

A1.2 測定精度

測定値 x に誤差 Δx が含まれているとき、測定結果は $x \pm \Delta x$ と記載する。 Δx は上記のような様々な要因による誤差の合成値である。通常、測定器の仕様書に測定精度が記載されているが、偶然誤差の値のみの表記もあれば、数値化誤差まで含めて記載する場合もある。また、誤差の標準偏差で表す場合と、起こりうる最大値で表す場合もある。

偶然誤差は正規分布に従うことが多いので、その標準偏差 σ_x を測定精度の値として用いる。 $(3\sigma_x$ 値を用いる場合もある)

数値化誤差は起こりうる最大値で表す。アナログ計器では、最小目盛りの $1/10$ 位まで読み取り、その位に ± 1 の読み取り誤差があるとする。デジタル計器では表示桁の最下位に ± 1 の丸め誤差があるとする。A/Dコンバータの場合、デジタル化ビット数を n とすると、分解能は測定レンジの $1/2^n$ なので、 $\pm 1/2^n$ で量子化誤差があるとする。

したがって Δx の値を正しく決定するためには、実験者は測定原理や測定器の性能・仕様を熟知していることが要求される。

A1.3 有効数字

通常 $x \pm \Delta x$ の書式では、誤差範囲 Δx の部分の数値は有効数字1~2桁で表すが、 x の値に Δx の有効数字の最下位より下位まで記してもデータとして無意味である。かえって、そこまで有効数字であるかのような誤解を与える恐れがあるので、望ましくない。 x と Δx の最小位はそろえて表記すること。

有効数字には、かつては計算労力を効果的に省く意味もあった。今日では、コンピュータ化され、計算労力を気にしなくなったので、途中計算は有効数字以上の桁数で進めてもよいが、公表する最終結果としては有効数字以下の桁を四捨五入して記すべきである。

A1.4 誤差伝搬

誤差を持つ測定値にもとづいて、計算で求めた値もまた誤差を引き継ぐ。この現象を誤差伝搬という。

X の測定値が誤差を含んで $x \pm \Delta x$ と表されるならば、 X の関数で $Y = f(X)$ と表される値 Y も誤差を含んで、 $y \pm \Delta y$ と表記しなければならない。ここで、

$$\begin{cases} y = f(x) \\ \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x) - f(x) \end{cases} \quad (16)$$

である。 Δx が充分小さいとき、 Δy は微分形式で、

$$\Delta y = f'(x) \Delta x \quad (17)$$

と表せる。

さらに一般化して、 Y が複数の測定値の関数で、 $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ と表される場合について考える。各測定値がそれぞれ誤差幅 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ を持つとし、ある一回の測定誤差が $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ であったとする。このとき Y に現れる誤差は、偏微係数を用いて各誤差成分が与える影響の線形和として、

$$\delta y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \right) \quad (18)$$

と表される。ここで、右辺の各誤差の項は、同じ符号のもので強めあっているかもしれないし、正負入り交じって結局うち消しあっているかもしれない。 Y の誤差 Δy は、多数回測定した場合の δy の分布幅であるべきであるが、これをどう評価したらよいだろうか。

絶対値の和(最悪条件を仮定)

各誤差がすべて最悪側に現れた条件で計算すると,

$$\Delta y_{\max} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \quad (19)$$

これは、比較的簡便な計算で Δy の起こりうる最大値を与える。 Δx の要因が数値化誤差(確率密度が矩形分布)である場合や、安全のため誤差を大きめに見積もりたい場合に適している。なお、同じ幅の矩形分布を多数足し合わせると、正規分布に近づいてゆくことが知られているので、 Δx が矩形分布であっても同程度の $\left| (\partial f / \partial x_i) \Delta x_i \right|$ が多数ある場合には、次の方法を使う方がよい。

標準偏差の二乗平均(正規分布に従うと仮定)

現実には、全ての測定誤差が同時に最悪側に現れるとは考えにくく、それぞれの誤差が独立に発生する偶然誤差であることが多い。この場合、各測定誤差が正規分布に従うと仮定し、標準偏差 $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \dots, \sigma_{xm}$ で表すと、 Δy も正規分布に従い、標準偏差は、

$$\Delta y = \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{xi} \right)^2} \quad (20)$$

となる。計算がやや煩雑であるが、統計理論的に意味のある結果を得ることができる。

支配的な誤差要因だけ考慮(簡易な概算法)

式(20)の計算では、二乗和を計算しているために、大きな誤差要因の項ほど、より支配的になる傾向がある。したがって、最大の誤差要因だけ考慮し、他は無視して、

$$\Delta y \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|_{\max} \quad (21)$$

と近似できる。これは少なめの見積もりとなるが、とくに一つの誤差要因が他より大きく、 n が少ない場合には、この概算でも実用上十分な近似値として用いることができる。

主な関数型について式(18)の例を示す. このように展開した各項に対して, 式(19)~(21)のいずれか適切な計算法を適用して, y の誤差を評価することになる.

線形結合関数

$$\begin{aligned}
 y &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n \\
 \frac{\partial y}{\partial x_i} &= k_i \\
 \delta y &= k_1 \delta x_1 + k_2 \delta x_2 + \cdots + k_n \delta x_n \\
 \sigma_y &= \sqrt{(k_1 \sigma_{x1})^2 + (k_2 \sigma_{x2})^2 + \cdots + (k_n \sigma_{xn})^2}
 \end{aligned} \tag{22}$$

多項式関数

$$\begin{aligned}
 y &= k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2^2 + \cdots + k_n x_n^n \\
 \frac{\partial y}{\partial x_i} &= i k_i x_i^{i-1} \\
 \delta y &= k_1 \delta x_1 + 2k_2 x_2 \delta x_2 + \cdots + n k_n x_n^{n-1} \delta x_n \\
 \sigma_y &= \sqrt{(k_1 \sigma_{x1})^2 + (2k_2 x_2 \sigma_{x2})^2 + \cdots + (n k_n x_n^{n-1} \sigma_{xn})^2}
 \end{aligned} \tag{23}$$

積・商の関数

$$\begin{aligned}
 y &= x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n \\
 \frac{\partial y}{\partial x_i} &= \frac{y}{x_i} \\
 \frac{\delta y}{y} &= \frac{\delta x_1}{x_1} + \frac{\delta x_2}{x_2} + \cdots + \frac{\delta x_n}{x_n} \\
 \frac{\sigma_y}{y} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x2}}{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sigma_{xn}}{x_n}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{24}$$

$\Delta x/x$ のような表現を, 相対誤差という. 積・商の関数では, 相対誤差で表現した方が便利で, 結果の相対誤差は, 各測定値の相対誤差の和になる.

式(18)および, 式(22)~(24)の例からも分かるように, 大きな微係数をもつ測定値は, わずかな測定誤差でも, 最終結果に大きな誤差伝搬を与える. そして, ひとつでも大きな誤差を与える項が存在すると, 他の測定値をどんなに高精度で計測しても, 最終結果の誤差はほとんど減少しない.

バランスのとれた測定系とは, 式(22)の絶対誤差の和, あるいは式(24)の相対誤差の和の表現で, 右辺各項の値が同程度にそろっているものである. もし極端に大きな項があれば, その測定精度を上げるよう, 測定方法や測定器の改善を検討する. 逆に不必要に高精度な項があれば, その測定は簡素化してもよく, 最終結果をほとんど劣化させずに, 実験コストを下げることができる.

補足2 最小二乗法

測定データを

- n データ数
- x_i 動歪み計の出力電圧 [V] ($i = 1 \sim n$)
- y_i 錘の重量 [gf] ($i = 1 \sim n$)

とする. 直線 $y = ax + b$ を仮定し, 最小二乗法を適用すると,

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad [\text{gf/V}] \quad (25)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad [\text{gf}] \quad (26)$$

測定値の誤差が, 式(25)の最小二乗法による傾き a の計算に与える誤差を, 標準偏差で評価すると,¹⁵

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sqrt{\sum \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \sigma_{y_i} \right)^2} \\ &= \sqrt{\sum \left(\left(\frac{n y_i - \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} - \frac{2(n x_i - \sum x_i)(n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i)}{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)^2} \right) \sigma_{x_i} \right)^2 + \sum \left(\frac{n x_i - \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sigma_{y_i} \right)^2} \end{aligned} \quad (27)$$

測定値

i	x_i [V]	y_i [gf]
1	_____	0.0
2	_____	_____
3	_____	_____
4	_____	_____
5	_____	_____
6	_____	_____

最小二乗直線の計算

$$\begin{aligned} n &= 6 \\ \sum x_i &= \text{_____} \\ \sum y_i &= \text{_____} \\ \sum x_i y_i &= \text{_____} \\ \sum x_i^2 &= \text{_____} \\ a &= \text{_____} \\ b &= \text{_____} \end{aligned}$$

¹⁵ この計算を行うExcelの書類を, 実験のwebページに掲載している.