



題目 ランデブーのシミュレーション

場所: 航空宇宙工学実験棟 (EN51) 宇宙機ダイナミクス実験室 (Ko-106)
電卓を持参すること

1. 目的

宇宙機のように実物を用いることが難しい対象の実験方法として、コンピュータ・シミュレーションによる仮想実験方法を学ぶ。本実験では、宇宙機の運動方程式を数値積分することにより、宇宙機のランデブー運動を模擬する。実験をとおして、宇宙機の軌道運動の性質とマニューバの与え方を理解し、効率のよいランデブー方法について考える。

2. ランデブーの概要

宇宙機のランデブー (Rendezvous) とは、宇宙機を他の宇宙機に接近させ、近接飛行させることである。スペースシャトルが人工衛星を捕獲したり、宇宙ステーションにドッキングする場合、また将来的には無人のサービス衛星を用いて、故障した衛星の修理を行うことも検討されているが、このような任務でランデブー技術が必要とされる。小惑星に接近する探査機もランデブーと言える。ランデブーにおいて、目標となる衛星をターゲット (Target) と呼び、能動的にランデブーを実行する衛星をチェイサー (Chaser) と呼ぶ。

二つの宇宙機のランデブーは、両者が同一時刻に同一の位置ベクトルと速度ベクトルを獲得したときに達成される。ランデブーが開始された時点では、二つの宇宙機は一般に遠く離れていて、異なる軌道上にある。そこからのランデブー手順は大きく二つのフェーズに分けられる。

最初の部分は軌道変換フェーズで、両者の軌道の形を同じにし、軌道面を一致させ、かつ軌道のなかでの位相を合わせる作業が行われる。この結果、チェイサーはターゲットの近傍に到達する。

第二の部分は、最終接近フェーズである。この段階では両者は十分接近しているので、一方の宇宙機 (通常はターゲット側) に固定した座標系に対する、他方の宇宙機 (通常はチェイサー側) の相対運動に注目してドッキングに必要な最終軌道変換を行う。

図 1 は 1996 年に若田飛行士が搭乗したスペースシャトルが、SFU を回収した際の最終接近フェーズ、図 2 は 1998 年に行われた「きく7号 (おりひめ・ひこぼし)」のランデブー実験、図 3 は 2009 年に行われた HTV 初号機の ISS へのランデブーの概要である。ともに一見奇妙な曲線を描いて運動している様子が示されている。これは運動を記述する座標系がターゲットに固定され、慣性空間に対して回転しているために、チェイサーの相対運動には重力の他に遠心力とコリオリ力が作用しているからである。

以下では、相対運動の方程式を誘導し、目標衛星が円軌道である場合の近似解を示す。

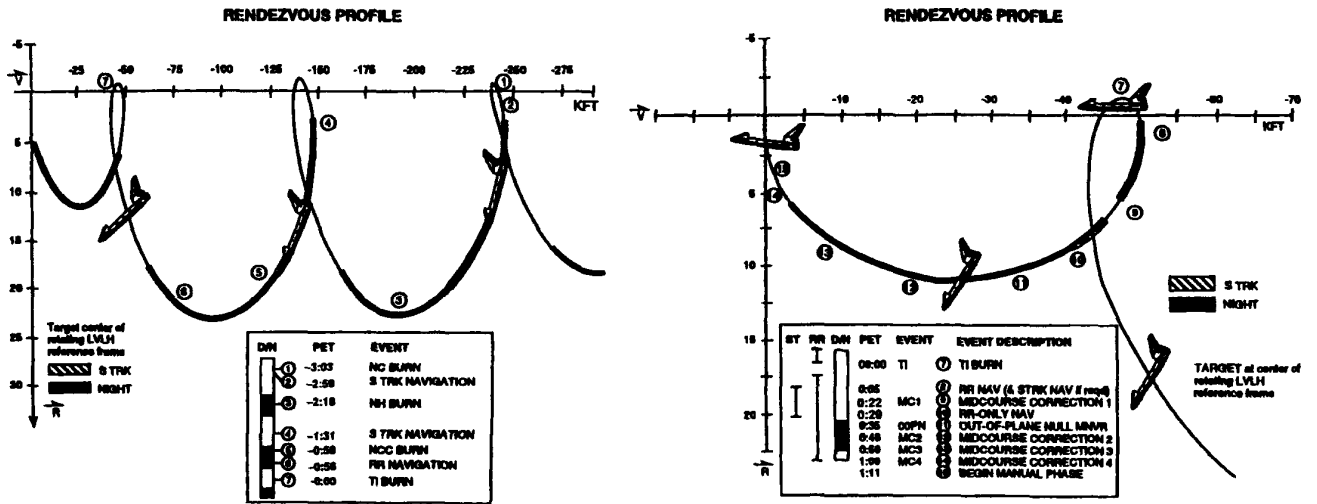


図 1 スペースシャトルの SFU へのランデブー(文献1)

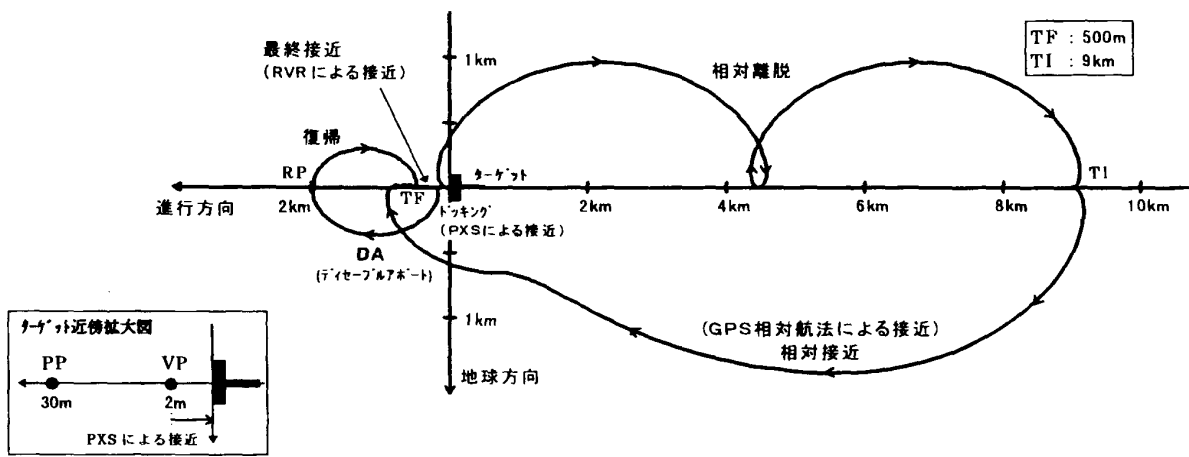


図 2 きく7号(おりひめ・ひこぼし)のランデブー実験計画(文献2)

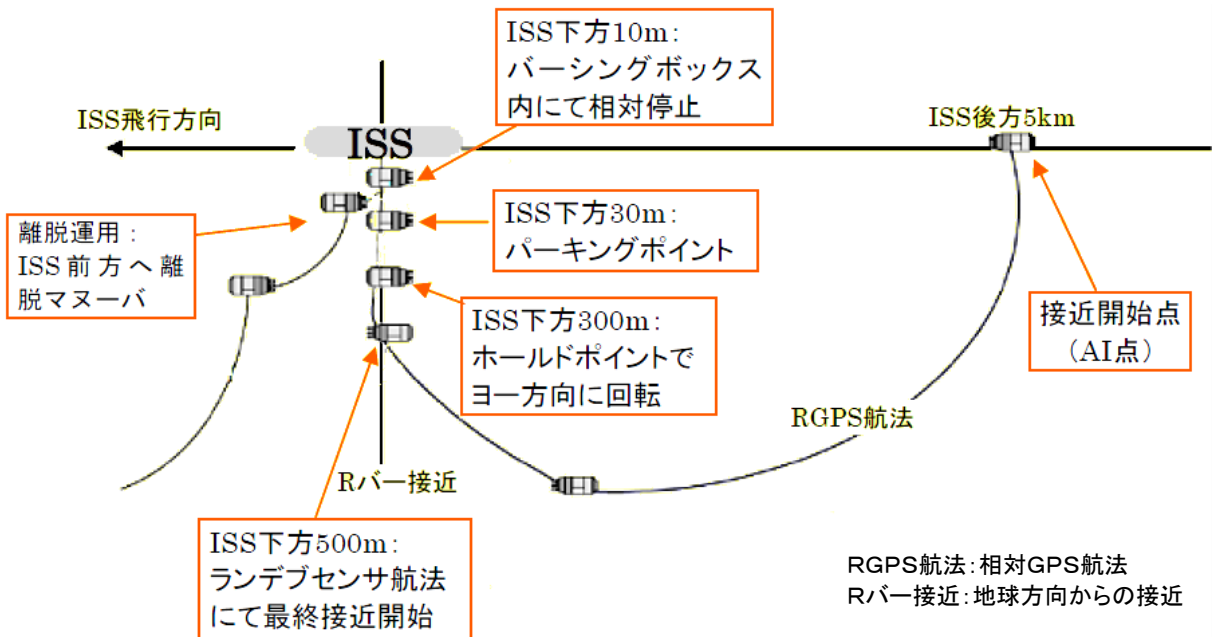


図 3 HTV 初号機の ISS へのランデブー(文献3)

3. 理論

3.1. 運動方程式

ターゲット衛星は、地球を原点とした位置ベクトルが \mathbf{r}_t 、回転角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で軌道を周回しているとする。ターゲットに固定した座標系を図4のように定義する。座標原点をターゲットに置き、 z 軸は軌道半径方向(上方)、 y 軸は角速度ベクトル方向で、 x 軸はそれらと右手直交系をなすよう進行前方水平方向に定める。

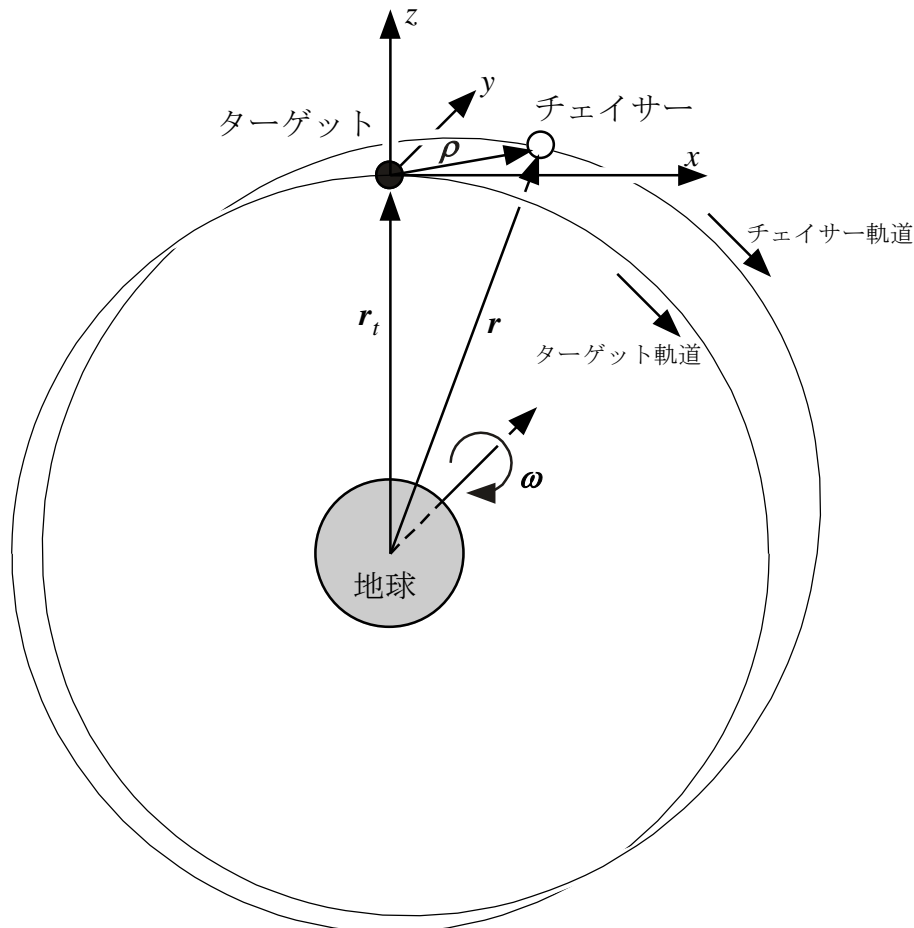


図4 座標系の定義

チェイサーの地球原点の位置ベクトルを \mathbf{r} とすると、ターゲットからの相対位置ベクトルは $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_t$ である。以上の各ベクトルを x, y, z 成分で表わすと、

$$\mathbf{r}_t = (0, 0, r_t), \mathbf{r} = (x, y, z + r_t), \boldsymbol{\rho} = (x, y, z), \boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0) \quad (1)$$

それぞれの衛星の運動方程式は、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{A}, \frac{d^2\mathbf{r}_t}{dt^2} = -\frac{\mu}{r_t^3}\mathbf{r}_t \quad (2)$$

ただし、 μ は地心重力定数($3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$)、 \mathbf{A} はチェイサーに推進力が働く場合の加速度である。

また、回転座標系の関係式より、

$$\underbrace{\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2}}_{\text{慣性座標系}} = \underbrace{\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})}_{\text{回転座標系で観測}} \quad (3)$$

これらを恒等式 $\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_t}{dt^2}$ に代入し, x, y, z 成分でまとめると, 次の式を得る.

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} + \dot{\omega}z - \omega^2 x = -\frac{\mu}{r^3}x + A_x \\ \ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3}y + A_y \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x - \omega^2 z = -\frac{\mu}{r^3}(z + r_t) + \frac{\mu}{r_t^2} + A_z \end{cases} \quad (4)$$

微分方程式(4)はランデブー問題の厳密式である. 本実験の計算機プログラムではこの式を用いている. プログラムでは初期条件 $\boldsymbol{\rho}_0 = (x_0, y_0, z_0), \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ から Runge-Kutta 法によって式(4)を数値積分し, 推進力が働かないあいだの任意時刻 t での $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$ を求めることができる.

x, y, z が r_t に比べて十分小さいとき, 式(4)は線形化でき, 次の形となる.

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} + \dot{\omega}z - \omega^2 x = -\frac{\mu}{r_t^3}x + A_x \\ \ddot{y} = -\frac{\mu}{r_t^3}y + A_y \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x - \omega^2 z = 2\frac{\mu}{r_t^3}z + A_z \end{cases} \quad (5)$$

この, 線形近似運動方程式(5)をヒルの方程式 (Hill's equation) と呼ぶ. さらに, ターゲット衛星の軌道が円である場合, ω は一定で,

$$\frac{\mu}{r_t^3} = \omega^2 \quad (6)$$

これを式(5)に代入すると,

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega\dot{z} + A_x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y + A_y \\ \ddot{z} = 2\omega\dot{x} + 3\omega^2 z + A_z \end{cases} \quad (7)$$

となる. 外力がない場合の式(7)の一般解 (Clohessy-Wiltshire 解) は次のように求まる.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6(\sin \omega t - \omega t) \\ 0 & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 4 - 3 \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 4 \sin \omega t - 3\omega t & 0 & -2(1 - \cos \omega t) \\ 0 & \sin \omega t & 0 \\ 2(1 - \cos \omega t) & 0 & \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)より, チェイサーの運動は, 軌道面内で x と z が連成した振動をし, 軌道面外方向へは y の独立した単振動をすることがわかる.

3.2. マニューバ(軌道変更)

ランデブーに用いられるマニューバ, およびいくつかの重要なマニューバについて定式化する.

$t = t_0$ での位置 $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ が与えられれば, $t = t_0 + \tau$ で任意の点 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ に至るように, $t = t_0$ で持つべき速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{p}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ は, 式(8)を解いて, 式(9)で与えることができる.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Bmatrix} &= \frac{\omega}{K} \begin{bmatrix} \sin \omega \tau & 0 & -6\omega \tau \sin \omega \tau + 14(1 - \cos \omega \tau) \\ 0 & -K/\tan \omega \tau & 0 \\ -2(1 - \cos \omega \tau) & 0 & 4 \sin \omega \tau - 3\omega \tau \cos \omega \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \\ -\frac{\omega}{K} \begin{bmatrix} \sin \omega \tau & 0 & 2(1 - \cos \omega \tau) \\ 0 & -K/\sin \omega \tau & 0 \\ -2(1 - \cos \omega \tau) & 0 & 4 \sin \omega \tau - 3\omega \tau \end{bmatrix} &\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $K = 3\omega \tau \sin \omega \tau - 8(1 - \cos \omega \tau)$ である.

3.2.1. ランデブー・マニューバ

$t = t_0$ で位置 $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 速度 $\dot{\boldsymbol{p}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ であるチェイサー衛星を, $t = t_0 + \tau$ で座標原点 $(0, 0, 0)$ にあるターゲットにランデブーさせるためには, 式(10)で表される速度増分 $\Delta V = (\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z)$ を, マニューバ量として与えればよい.

$$\begin{Bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{Bmatrix} = \frac{\omega}{K} \begin{bmatrix} \sin \omega \tau & 0 & -6\omega \tau \sin \omega \tau + 14(1 - \cos \omega \tau) \\ 0 & -K/\tan \omega \tau & 0 \\ -2(1 - \cos \omega \tau) & 0 & 4 \sin \omega \tau - 3\omega \tau \cos \omega \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで $\omega \tau$ が π の奇数倍のときは y_0 が 0 でない限り, また偶数倍のときは y_0 と z_0 がともに 0 でない限り, (10)式の値が発散することに注意する. つまり, 慣性空間から見て, ターゲットの現在地点および, 軌道の逆側でのランデブーはほとんど不可能である.

3.2.2. 停止マニューバ

ランデブー・マニューバの結果, チェイサーは $t = t_0 + \tau$ で, ターゲット地点に達する. ただしこのとき, ある相対速度 $\dot{\boldsymbol{p}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ をもって接近してくるため, ランデブーを達成するためには, ターゲット地点で相対速度を 0 にするマニューバを行う. これは式(11)で表され, いわゆる逆噴射である.

$$\begin{Bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ターゲット地点以外でも, ターゲットと同じ円軌道上(近似的にはほぼ x 軸上)で停止マニューバを行うと, ターゲットとの相対位置を保ったまま停止しつづけることができる. 他の位置では遠心力と重力が釣り合っていないため, 停止しつづけることができない.

3.2.3. 軌道面を合わせる

ターゲットとチェイサーの軌道面が合っていないと、 y 軸方向の運動が生じる。これは x や z とは独立した単振動であるので、チェイサーがターゲット軌道面を横切る瞬間、つまり $y = 0$ のときに、

$$\Delta V_y = -\dot{y} \quad (12)$$

のマニューバを与え $\dot{y} = 0$ にすると、両者の軌道面が一致し、以後 $y \equiv 0, \dot{y} \equiv 0$ となる。

3.2.4. 円軌道に投入

チェイサーを円軌道に投入すると、 xz 座標上で $+x$ または $-x$ 方向へ直線(厳密には大きな円弧)を描いて移動してゆく。特に、ターゲット軌道にごく近い円軌道は、ドリフト軌道と呼ばれ、チェイサーとターゲットの位相を合わせるのに有効である。

円軌道投入後は $\ddot{x} \equiv \ddot{z} \equiv \dot{z} \equiv 0$ でなければならないので、式(7)より x 軸方向へのドリフト速度は、

$$\dot{x}_d = -\frac{3}{2}\omega z \quad (13)$$

の関係がある。したがって、式(13)と現在の速度との差をとり、円軌道投入マニューバは、

$$\begin{Bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2}\omega z - \dot{x} \\ -\dot{z} \end{Bmatrix}, \forall \Delta V_y \quad (14)$$

で与えられる。

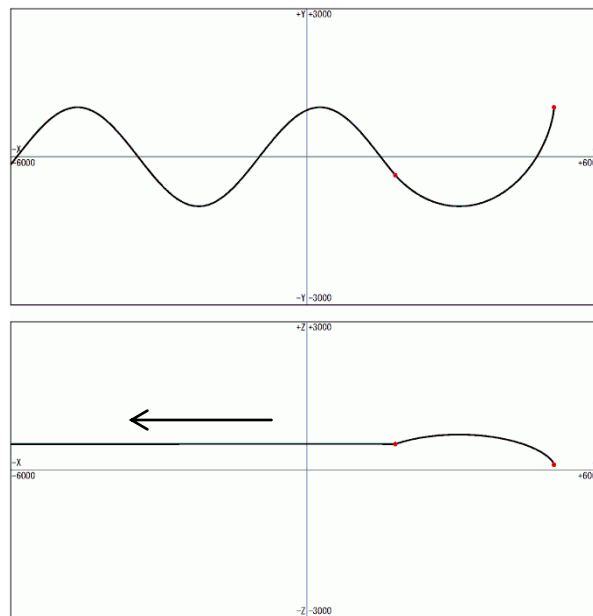


図 5 円軌道投入

3.2.5. 軌道周期を合わせる

ターゲットと周期が等しい軌道に投入すると、一周後に初期の位置・速度に戻るため、相対運動は閉じた軌跡上を回りつづける。したがって、ターゲットに対し完全相対停止ではないものの、大きく離れることなく近傍で動きつづける。

式(9)より、 $\omega\tau = 2\pi$ のときに $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$ となる条件を求めると、軌道周期を合わせるマニューバは、

$$\Delta V_x = -2\omega z - \dot{x}, \forall \Delta V_y, \forall \Delta V_z \quad (15)$$

である。この軌道の相対運動軌跡は、 x 軸上に中心のある楕円となる。その xz 平面への投影像は長短比 2:1 の楕円で、 x 軸方向に長軸、 z 軸方向に短軸を持つ。

3.2.6. フライ・アラウンド軌道に投入

軌道周期を合わせたときの、相対運動軌跡が描く楕円の中心を、ターゲットに一致させた運動をフライ・アラウンドと呼ぶ。この軌道にチェイサーを投入すると、ターゲットを中心にいつまでも周回しつづける。360 度方向から観測できる。たとえば故障したターゲット衛星を捕獲するミッションでは、どこか外傷はあるか、どこをつかんだらよいか、などを判断するための外見観測に有効である。

フライ・アラウンド軌道への投入マニューバは、

$$\begin{Bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\omega z - \dot{x} \\ \frac{1}{2}\omega x - \dot{z} \end{Bmatrix}, \forall \Delta V_y \quad (16)$$

である。

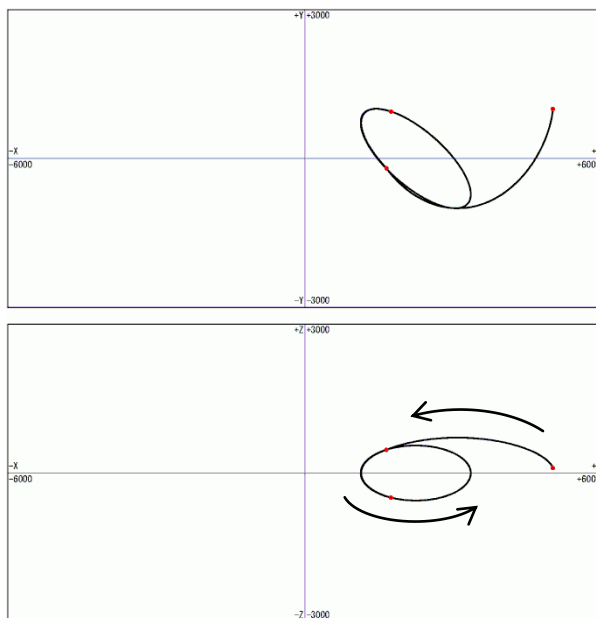


図 6 軌道周期を合わせる

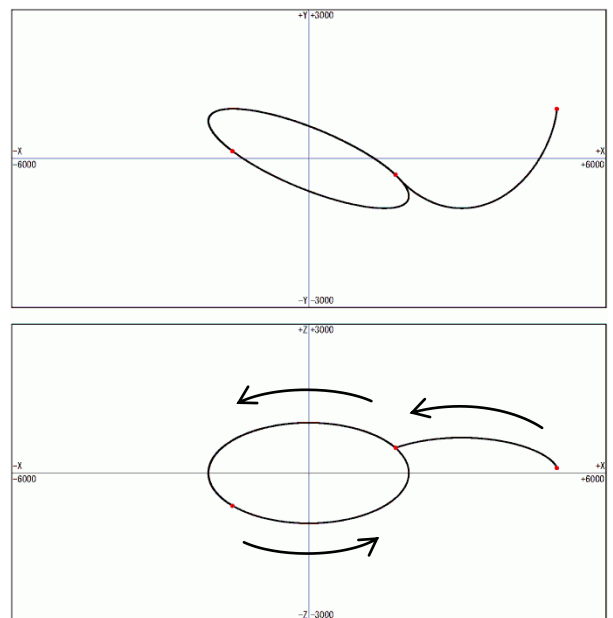


図 7 フライ・アラウンド軌道へ投入

4. 実験の手順

4.1. シミュレーションプログラムの概要

シミュレーション実験には、Java 言語で記述したプログラムを用いる。フローチャートは図 8 の構成となっている。初期設定の画面を図 9 に、実行中の画面を図 10 に示す。コンピュータおよびプログラムの操作方法については、実験時に指導する。

はじめに、「フライト・トレーニング」モードで、手動でマニューバを行い、軌道運動の性質とマニューバの与え方を理解する。

次に、「ランデブー・ミッション」モードで、自動ランデブー機能を使い、最適なマニューバの与え方を検討する。

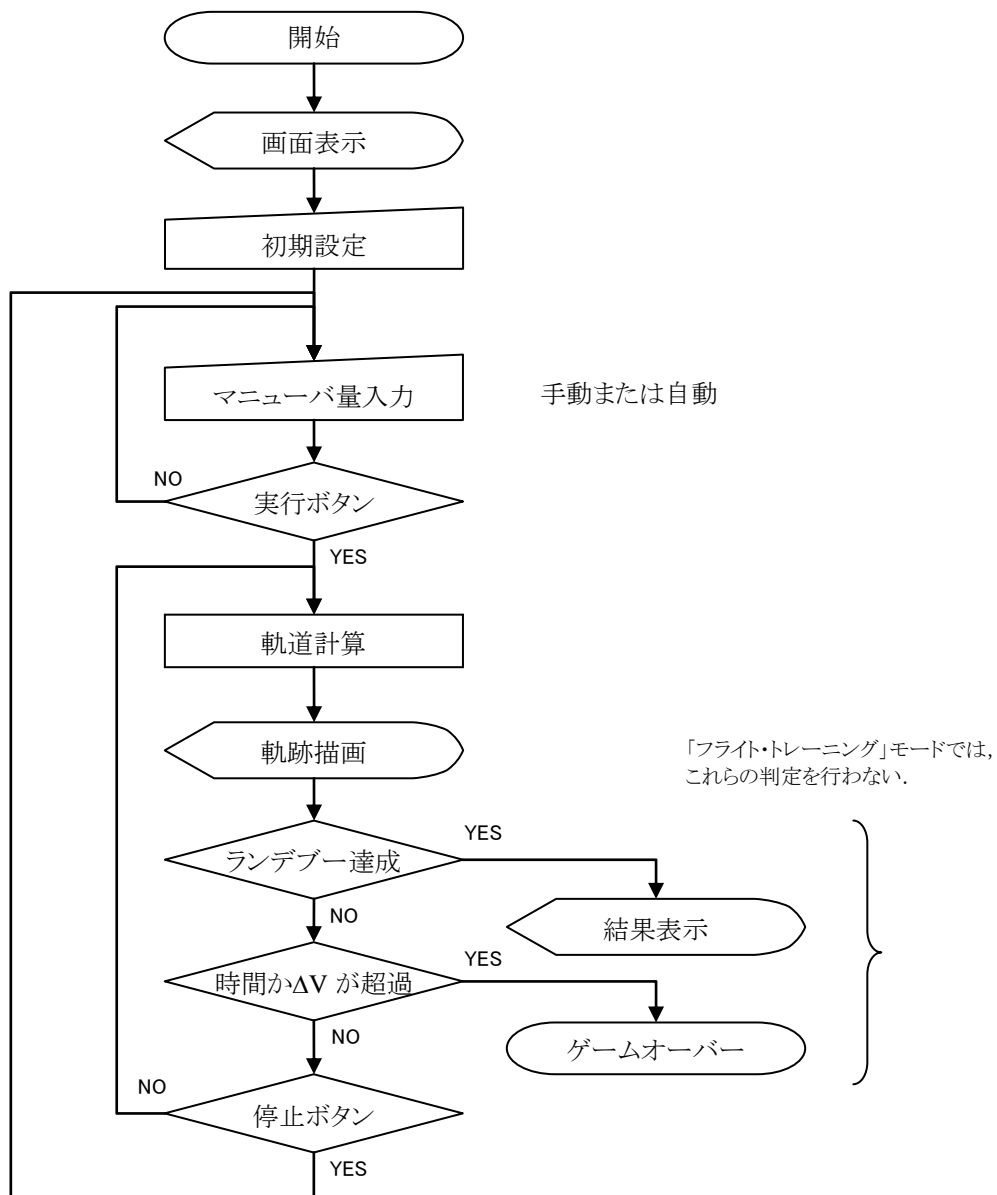


図 8 プログラムのフローチャート



図 9 初期設定画面

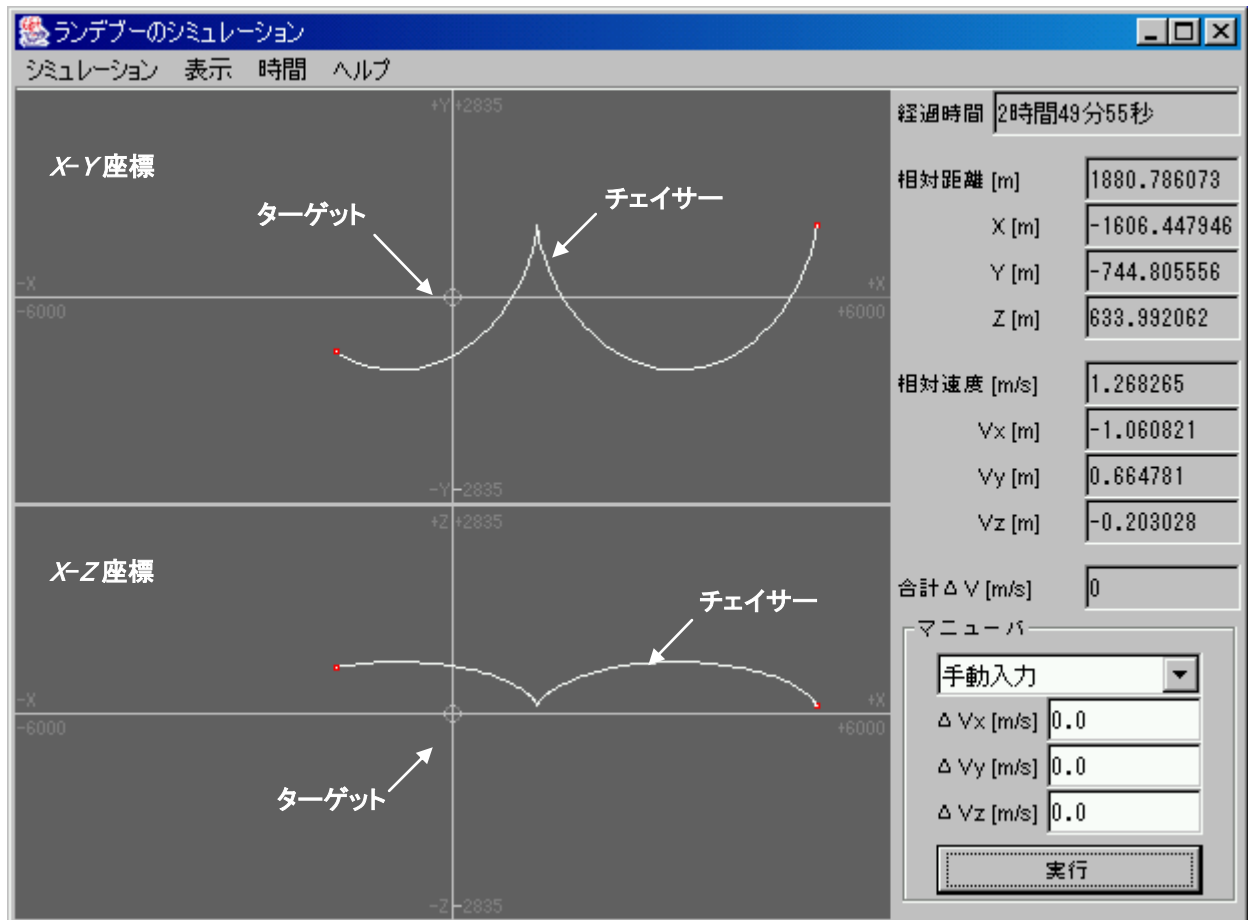


図 10 実行中の画面

4.2. 軌道運動の観察

4.2.1. 相対位置の影響を観察する.

設定画面で「フライト・トレーニング」モードを選択する. ターゲット衛星の軌道高度を 1000 km とする. (地球赤道半径が 6378.14 km であるので, 軌道半径は $r_t = 7378.14$ km, 軌道角速度は $\omega = 9.962 \times 10^{-4}$ rad/s となる.)

チェイサーの初期位置・速度を, ターゲット位置に静止

$$x_0 = y_0 = z_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 \quad (17)$$

の状態を基準とし, x_0 と y_0 を 1000 m 単位で, z_0 を 100 m 単位で増減させ, 初期位置の影響によるチェイサーの運動の様子を観察する.

なぜそのような運動になるのか, 軌道力学的に考えよ.

4.2.2. 相対速度の影響を観察する

式(17)の基準条件に対し, チェイサーの初期速度を, \dot{x}_0 を 0.1 m/s 単位で, \dot{y}_0 と \dot{z}_0 を 1 m/s 単位で増減させ, 初期速度の影響によるチェイサーの運動の様子を観察する.

なぜそのような運動になるのか, 軌道力学的に考えよ. そして, 与える速度方向と, 影響される軌道要素との対応を見いだせ.

4.2.3. 基本マニューバの効果を観察する(今学期は省略する)

式(17)の基準条件に対し, 4.2.2 で得た知見を参考にマニューバを実行し, マニューバ前後の軌道の変化の様子を観察する. $\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z$ のいずれかひとつずつ与えると, 理解しやすい.

4.2.4. 特殊マニューバを手動で行う

初期条件として, 3次元運動を生じるような条件, たとえば

$$x_0 = 5000, y_0 = 1000, z_0 = 100, \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 \quad (18)$$

を与える. この条件から, 相対停止, 軌道面合わせ, 円軌道投入, 軌道周期合わせ, フライ・アラウンドのマニューバを行ってみよ. 必要ならマニューバ量の計算に電卓を用いる.

4.2.5. 手動ランデブーを試みる(今学期は省略する. 興味のあるものは自習で挑戦してみよ.)

ここから, 「ランデブー・ミッション」モードにする.

式(18)の初期条件から, 手動でランデブーを行う. ここでは電卓で式(10)を計算することはせず, 4.2.1~4.2.3 での経験をもとに, なるべく完全手動で挑戦してみよ. ターゲットから相対距離 100 m 以内, 相対速度 0.001 m/s 以内になったら, ランデブー達成とみなす. (相対距離 100 m 以内に入ると, 自動的に一時停止するので, そこで「相対停止」機能を使って良い.)

4.3. 最適ランデブーの検討

4.3.1. 自動ランデブー機能について

自動ランデブーボタンを押すと、ランデブーまでの周回数を聞いてくる。これは、慣性空間から見てターゲット衛星の何周後の地点でランデブーするかを意味し、式(10)で用いるランデブーまでの時間 τ に比例して、 $\omega\tau/2\pi$ で与えられる量である。ここで 0.5 の整数倍の値を入力すると、式(10)が発散するので避ける。

4.3.2. 最適なランデブーを探索する

初期条件を固定し、マニューバを途中で1回と、ランデブー達成時の停止マニューバの計2回に限ると、調整すべき量は、 t_0 つまりいつどこでマニューバを行うかと、 τ つまりいつどこでランデブーするか、の二つに集約される。

また、ランデブー軌道の優劣はおもに、マニューバに要した ΔV の合計(推進剤消費量に相当)と、ランデブー完了までの経過時間とで比較される。

初期条件を一定(たとえば式(18)の初期条件)にして、 t_0 と τ を変化させて、最適なランデブーを探索せよ。

一般に ΔV 最小と時間最短は両立しないことを確かめる。

5. 提出物

- 手動ランデブー、最小 ΔV ランデブー、最短時間ランデブー達成時の画面のプリントアウト。
- 手動マニューバを行った際に気がついた軌道軌跡の特徴について述べ、初期位置・初期速度の各軸方向成分が持つ意味の、軌道力学的な考察。
- それ以外にも興味深い軌道が得られたら、画面をプリントアウトして添付し、考察を加える。
- ΔV ならびに経過時間を小さくするための方法についての考察。
- 余力があれば、下記の式の導出に挑戦してみよ
 - 運動方程式(4)を線形近似して、Hill の方程式(5)の導出。
 - 近似の運動方程式(7)を解いて、一般解の式(8)の導出。
 - 式(8)を速度について解いて、マニューバの式(9)の導出。

6. 参考文献

- 1) 「日本ロボット学会誌(宇宙ロボット特集)」, 14 巻 7 号, 1996 年
- 2) 「HTV-1 ミッションプレスキット」, JAXA, 2009 年
http://www.jaxa.jp/countdown/h2bf1/pdf/presskit_htv_j.pdf
- 3) 「宇宙工学入門 II」, 茂原正道, 木田隆, 培風館, 1998 年

他に、数値計算の教科書で Runge-Kutta 法による微分方程式の数値積分について学ぶことを推奨する。

7. A. [付録]最適ランデブー探索の補助図

図 11 は, $x_0 = 5000, y_0 = 1000, z_0 = 100, \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ の初期条件で, t_0 と τ を変化させたときの ΔV の変化を, 濃淡で表したものである. 明るい所ほど ΔV が小さく, 暗いところは ΔV が大きい. したがって, 明るい部分を狙って t_0 と τ を与えると良い.

なお, この図の計算には, 線形近似の Clohessy-Wiltshire 解(8)を用いたので, 厳密解を解いている今回のシミュレーションプログラムとは若干の差が生じる.

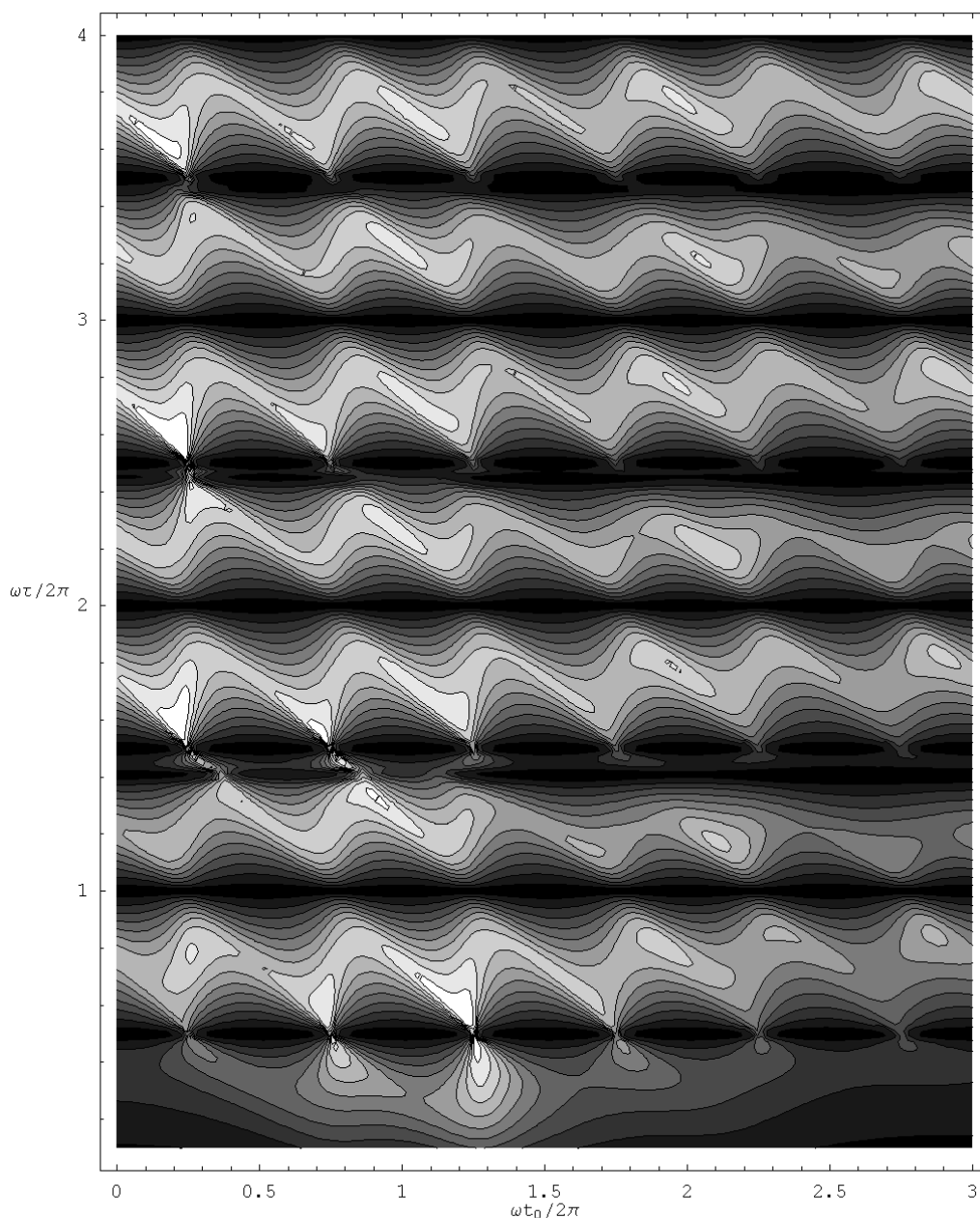


図 11 t_0 と τ に関する ΔV の濃淡図

8. A. [補足]レポート体裁について

実験レポートには、一般的に以下の内容を期待する。

- 目的
何を明らかにしようとするのか。
- 理論
実験で仮定している理論を述べる。(その理論で考慮している現象と、無視している現象を区別し、そこから理論の適用限界を理解して実験内容を設定しなければならない。)
- 実験方法
使用装置、実験手順などを説明する。読んだ人が追実験できることが理想。
- 結果
実験条件(実験環境、設定値、初期条件など)も忘れずに。
- 結論(あるいは考察、まとめ)
(本実験では、結果と結論を分けて書きにくいかもしれない。)

この実験のレポートは、 手書きで作成してください。

模範レポートが学生のネットで流布しており、昨年は半数近くが先輩や友人のコピーレポートだったため。

真面目な学生には申し訳ありませんが、コピーした先輩を恨んでください。

9. A. [補足]WWW 追加情報

宇宙機ダイナミクス研究室担当の航空宇宙工学実験では, WWW で追加情報を配布している.

http://ssdl.aero.kyushu-u.ac.jp/?AA_Experiment

今回のランデブー・シミュレーションのプログラムも, ここからダウンロードできるので, 実験日以外でも予習・復習が可能となっている. (Java 実行環境 1.4.1 以上が必要)

10. A. [補足]講義「軌道力学」との対応

本実験では, 宇宙工学を専門としない学生にも理解しやすいよう, 一般の物理学の慣例 (X が横軸, Y や Z が縦軸) に準じた座標系を使った. そのため, 宇宙工学では標準的で, 3年生前期の講義「軌道力学」でも用いられている「RSW 座標系」と比べ, XYZ の順が異なっている. 「軌道力学」の講義ノートと見比べる際の参考に, 対応表を載せる.

表 1 座標の対応表

	講義「軌道力学」	この実験手引書
R:軌道半径方向	X	Z
S:進行前方水平方向	Y	X
W:角速度ベクトル方向	Z	Y